

文章编号: 1000-7598-(2008)11-3021-06

水力压裂扩展的流固耦合数值模拟研究

连志龙^{1,2}, 张 劲³, 吴恒安¹, 王秀喜¹, 薛 炳¹

(1. 中国科学技术大学 力学与机械工程系/中科院材料力学行为和设计重点实验室, 合肥 230027;

2. 中国石油集团钻井工程技术研究院 钻井工艺研究所, 北京 100195

3. 中国石油大学 石油与天然气工程学院, 北京 102249)

摘 要: 以临界应力作为裂纹扩展准则并采用流固耦合模型模拟了水力压裂扩展问题, 推导出裂缝面内的压降方程表达式, 并编写出用户子程序嵌入到 ABAQUS 中。建立的计算模型能够模拟地应力、岩石力学特性、压裂液流体特性等各种复杂因素对水力压裂扩展的影响。通过计算分析得到一些有益结论, 采用有限元软件 ABAQUS 求解可渗透油藏水力压裂扩展过程问题是可行的; 提出了临界宽度的概念, 它可以作为判断裂缝是作为起渗透作用的孔隙通道还是作为起导流作用的裂缝的依据; 其结论对于压裂作业优化具有参考价值。

关 键 词: 水力压裂; 流固耦合; 射孔; 数值模拟; 有限元

中图分类号: TE 357.1

文献标识码: A

A simulation study of hydraulic fracturing propagation with a solid-fluid coupling model

LIAN Zhi-long^{1,2}, ZHANG Jing³, WU Heng-an¹, WANG Xiu-xi¹, XUE Bin¹

(1. CAS Key Laboratory of Materials Behavior and Design, Department of Mechanics and Mechanical Engineering, University of Science and Technology of China, Hefei 230027, China; 2. CNPC Drilling Research Institute, Drilling Technology Institute, Beijing 100195, China;

3. College of Petroleum and Natural Gas Engineering, China University of Petroleum, Beijing 102249, China)

Abstract: A model of coupling the stress equilibrium and fluid continuity equations is proposed and implemented to solve numerical simulation problem of the hydraulic fracturing propagations. The mechanism of critical stress criterion of crack propagation is also introduced. The pressure descent distribution function on the fracture face along the fracture length is deduced and the corresponding user subroutines are developed and also embedded into ABAQUS. The complex factors of geology such as in-situ stress distribution, mechanical properties, fracturing fluid properties etc. are included in the present model. Several conclusions are drawn from the simulation results. It is viable to solve problems of hydraulic fracturing propagations in the permeable reservoirs with the finite element analysis software(ABAQUS). The concept of critical width is proposed; the critical width can be used to judge a hydraulic fracture is treated as a porous passage or as a fluid flow fracture passage. The obtained conclusions are of much significance for the perforation parameter optimization and design of hydraulic fracturing treatments.

Key words: hydraulic fracturing; solid-fluid coupling; perforation; numerical simulation; finite elements

1 引 言

水力压裂作为一种应用广泛的现代工程技术, 在石油开采、煤层注水、防治冲击地压、地应力测量、水库诱发地震、水坝及边坡失稳控制、地热开发等众多领域具有十分广阔的应用前景。实践证明, 有些水力压裂效果好, 达到了预期的目的, 而有些水力压裂效果差, 甚至压裂失败。究其原因, 主要是由于对水力压裂的机理研究不够, 即对水力

压裂过程中裂纹扩展的规律以及压裂液与岩体间相互耦合作用的机理研究不够, 故在水力压裂过程中易于出现参数选择不当的情况, 未能采取相应的技术措施, 致使水力压裂效果无法得到保证。为了避免水力压裂的盲目性, 对水力压裂过程中裂纹的扩展规律以及流固耦合作用进行深入研究是十分迫切的。

由于水力压裂过程是一个十分复杂的力学、物理、化学过程, 很难直接观察到, 只能借助于建立

收稿日期: 2006-11-06

作者简介: 连志龙, 男, 1977 年生, 博士研究生, 从事水力压裂数值模拟的研究。E-mail: xxwang@ustc.edu.cn

在种种假设和简化条件的基础上进行间接分析。数值模拟作为认识水力压裂机理的一种重要手段,通过模拟各种地质条件下裂缝的启裂和延伸过程,可以获得水力压裂缝的扩展规律,已有大量关于水力压裂数值模拟方法的研究发表^[1-4]。由于水力压裂数值模拟涉及到岩石力学、断裂力学、渗流力学、计算力学等多学科知识,受目前技术力量的限制,已有的研究成果存在缺陷不可避免,如无法处理多裂缝扩展问题,难以模拟复杂岩体如存在天然裂缝的岩体的行为,又由于把岩体视作线弹性材料而不是孔隙材料,很难实现裂缝扩展过程的多场耦合求解,导致模拟出来的结果与现场实测有较大的出入,需在数值模拟技术上进行改进。

ABAQUS 是个功能非常强大的商业有限元软件,它提供了多种岩土本构模型,并能够处理岩体的多裂缝扩展等复杂问题以及求解渗流-应力耦合问题,但由于水力压裂问题中裂缝面内水力压力会随着裂缝扩展动态变化,用户无法直接用它来模拟水力压裂问题,必须对它进行二次开发,本次研究是建立在 ABAQUS 已有功能的基础上,推导出裂缝面内的压降方程表达式,编写用户子程序并嵌入到 ABAQUS 中,运用流固耦合的方法模拟水力压力作用下裂纹扩展过程。建立的计算模型可以综合考虑地应力、岩石力学特性、压裂液流体特性等各种复杂因素对水力压裂的影响。获得的数值模拟结果更贴近实际状况,研究结果对帮助人们设计出最佳的水力压裂作业方案,提高低渗透油藏产能比及油田压裂增产措施具有一定的指导意义。

2 耦合方程

在本文的水力压裂力学模型中,假设地层为各向同性孔隙材料,组成储层的岩石颗粒不可压缩;储层完全饱和,孔隙中的流体是不可压缩的;裂缝扩展过程是一个平面应变准静态过程。

水力压裂问题是压裂液流体流动与岩土体变形动态耦合的过程,在数值模拟中可通过耦合求解应力平衡方程式(1)和流体连续性方程式(2)实现。进行水力压裂时,随着流体注入压力的不断增大,裂缝面的渗透压力 u_w 相应增大,储层的孔隙压力梯度也随之增大,导致储层中的有效应力 $\bar{\sigma}$ 增加。而有效应力的变化,改变了储层岩体的应力状态必然引起储层岩土体的孔隙比 n 、渗流速度 v_w 、渗透率等渗流参数的变化,反过来又影响到渗流场中孔隙压力 u_w 的变化,渗流场与岩土变形场的这种相互作用即为流固耦合作用。

根据岩土体变形为线弹性变形的假设,遵从广义虎克定律,可得用有效应力表示的平衡方程:

$$\int_V (\bar{\sigma} - u_w \mathbf{I}) \delta \dot{\epsilon} dV = \int_S t \delta v dS + \int_V f \delta v dV + \int_V n \rho_w g \delta v dV \quad (1)$$

流体连续性方程式^[6]:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_V \frac{\rho_w}{\rho_w^0} n dV \right) = - \int_S \frac{\rho_w}{\rho_w^0} n n \cdot v_w dS \quad (2)$$

式中: V 为积分区域; S 为积分区域的表面; δv 为虚速度场; $\delta \dot{\epsilon}$ 为虚变形率; $\bar{\sigma}$ 为真(柯西)有效应力; t 为单位面积表面外力; f 为单位体积体力(不包括流体重力); g 为重力加速度; ρ_w 为流体密度; ρ_w^0 为流体参考密度; v_w 为渗流速度; n 为孔隙率; n 为表面的外法线方向; $\mathbf{I}$ 表示单位矩阵。

3 裂纹扩展准则

试验和理论研究均表明,具有初始裂纹的岩体,其应力强度因子 K_I 随注入压裂液压力的增加而增大,当 K_I 增大到临界值 K_{IC} 时,岩体处于由稳定向不稳定扩展的临界状态,因此断裂韧度 K_{IC} 为最常用的裂纹扩展准则。在 ABAQUS 软件中,除断裂韧度 K_{IC} 可以作为裂纹扩展准则之外,还有 3 种方法可以作为判断裂纹是否扩展的准则,它们分别是:临界应力准则、临界裂纹张开位移准则和裂纹长度对时间准则。

水力压裂过程中是拉伸破裂,还是剪切破裂取决于地应力、岩石和流体的各种力学特性,考虑到岩体裂纹的扩展是一个裂纹尖端脆性断裂的过程,本文选择临界应力作为裂纹扩展准则。在 ABAQUS 中临界应力准则的实施原理如图 1 所示。预设裂纹由主面和从面构成,而从面又由即绑定部分和解开部分两部分组成,其中绑定部分表示尚未开裂的部分,解开部分表示裂纹已经开裂。式(3)为临界应力准则表达式。为了判断裂纹能否扩展,将从面上当前裂尖点前方一定距离处的法向应力和

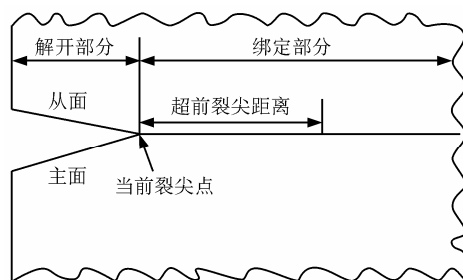


图 1 临界应力准则示意图

Fig.1 Specification for the critical stress criterion

剪切应力代入到临界应力准则式 (3) 中计算, 当断裂准则等于或大于 1.0 时, 则当前裂尖节点对将解开, 裂纹向前扩展一定距离。

$$f = \sqrt{\left(\frac{\hat{\sigma}_n}{\sigma^f}\right)^2 + \left(\frac{\hat{\tau}_1}{\tau_1^f}\right)^2 + \left(\frac{\hat{\tau}_2}{\tau_2^f}\right)^2}, \quad \hat{\sigma}_n = \max(\sigma_n, 0) \quad (3)$$

式中: $\hat{\sigma}_n$ 为指定点处的法向应力分量; $\hat{\tau}_1$ 和 $\hat{\tau}_2$ 为指定点处的剪切应力分量; σ^f 、 τ_1^f 和 τ_2^f 分别为临界法向应力和临界剪切应力, 其值由用户指定。在二维问题分析中由于与剪切失效应力 τ_2^f 不相关, 因此不需要指定此值。

4 裂缝面内压降方程与实现

在层状介质二维流场的理论分析中, 一般假设水力压裂缝内的流体流动属于两块多孔板间的层流流动, 可按牛顿流体进行分析。假设在压裂作业中任意时刻压裂液注入率为 q_i , 则单翼流量 $q = q_i / 2$, 裂缝高度为 h_f , 进一步假设裂缝高度在整个压裂过程中保持不变, 裂缝内二维流动简化为一维流动, 其压降满足如下方程^[7]:

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{12\mu q}{h_f w^3} \quad (4)$$

式中: μ 为压裂液黏性系数 (Pa·S); w 为裂缝宽度 (m)。

假设裂缝的宽度按半椭圆形扩展, 裂缝长度为 L , 裂缝 (根部) 最宽处宽度为 w_0 , 压力为 P_0 , 如图 2 所示, 以裂缝根部中心 O 为原点, 沿裂纹方向建立 X 轴, 则与原点距离为 x 处的裂缝宽度为

$$w = w_0 \sqrt{1 - x^2 / L^2} \quad (5)$$

将式 (5) 代入式 (4) 积分得

$$p = -\frac{12\mu q L x}{h_f w_0^3 \sqrt{L^2 - x^2}} + C_0 \quad (6)$$

又由边界条件:

$$p|_{x=0} = P_0 \quad (7)$$

$$\text{可求得} \quad C_0 = P_0 \quad (8)$$

裂缝面上的压力分布可表示为

$$p = -\frac{12\mu q L x}{h_f w_0^3 \sqrt{L^2 - x^2}} + P_0 \quad (9)$$

式 (9) 中各个不同点处的裂缝宽度都用 w_0 表

示, 将式 (5) 代入式 (9), 裂缝中不同点的压力值可用该处的裂缝宽度 w 表示, 即

$$p = -\frac{12\mu q x}{h_f w_0^2 w} + P_0 \quad (10)$$

当 $x \rightarrow L$ 时, 亦即 $w \rightarrow 0$ 时, 由式 (10) 可知 $P \rightarrow -\infty$, 可见式 (10) 存在解的奇异性, 这显然不符合实际情况, 这一区域称为流体滞后区^[7]。为了避免方程奇异性所导致的压力不合理, 进一步假设流体滞后区内的流体压力应不小于周围岩土渗流场边界上的压力 H , 因此压降方程可写成如下形式:

$$\left. \begin{aligned} p &= -\frac{12\mu q x}{h_f w_0^2 w} + P_0, & p > H \\ p &= H, & p < H \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

式中: H 为根据渗流方程计算估计求得的渗透压力。

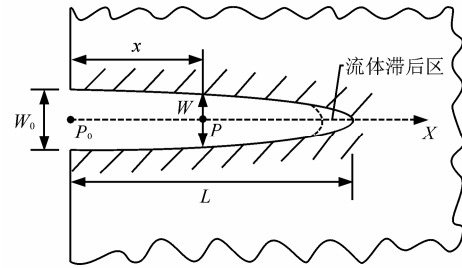


图 2 压降方程求解示意图

Fig.2 Illustration of hydraulic pressure descent function

压裂扩展过程中裂缝长度和裂缝宽度是实时动态变化的, 根据式 (11) 压降方程编写用户子程序实时计算裂缝扩展过程中水力压力沿裂缝的分布, 并借助 ABAQUS 软件提供的用户子程序 DISP 和 FLOW 接口实现这一功能。

在 ABAQUS 中用户子程序 DISP 用于指定预定义边界条件 (强制边界条件), 它可定义各种类型自由度的边界条件, 针对边界的节点施加边界条件; 用户子程序 FLOW 在渗流耦合分析中用于定义非均匀渗透系数和相应的外界渗透压, 针对边界上单元积分点施加载荷。压降方程的表达式虽然简单, 但具体实现却很困难。如图 3 所示, 任意时刻预设的裂缝可分为 3 段: 预裂段 (射孔段)、压裂段 (扩展段) 和未裂段 (绑定段)。在石油开采工程中, 油井射孔段孔道的形成是通过射孔弹被引爆后产生的高温、高压、高速射流对岩石进行强烈挤压破碎而形成的一种锥形孔道, 射孔长度一般在 0.4~

1.0 m 之间,射孔段的宽度比压裂段的缝宽度要大得多,而其长度又远远小于压裂段,因而可认为该段内压裂液不产生压降,该段的水力压力载荷可以在 ABAQUS 的 inp 文件中通过关键字 *BOUNDARY 加载实现。裂缝扩展段内的水力压力分布可按式 (11) 的压降分布函数通过用户子程序 DISP 加载。然而使用此函数时必须预先知道压力 P_0 的值,必须调用子程序 FLOW 以获得压力值 P_0 ,将 FLOW 程序内的变量 U 设作共用变量,并按如图 3 所示的方式设定边界 FLOW,它可以实时调用子程序 FLOW,借助变量 U 就可以把指令 *BOUNDARY 的压力值 P_0 实时动态地传递给子程序 DISP。裂缝面宽度 w 的求解相对简单些,凭借子程序 DISP 自身就可以获得裂缝面内每个节点的坐标值,再通过节点坐标值就可以求得裂缝面内每一对节点的相对距离,这个相对距离即为裂缝扩展段该处的宽度 w ,这样子程序 DISP 就有了压力值 P_0 和宽度 w ,从而便可根据压降方程式 (11) 计算裂缝面内各个节点的压力值。绑定段的压力加载可以借助子程序 FLOW 返回的压力值用 DISP 加载上去。

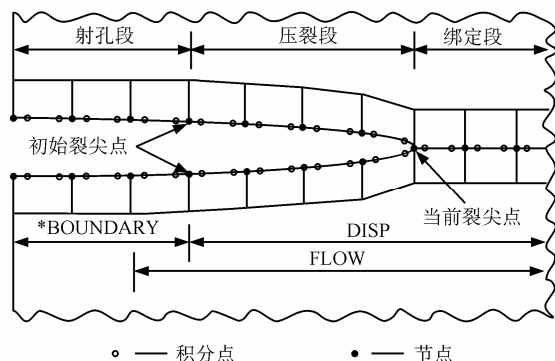


图 3 水力压力加载示意图
Fig.3 Depiction of hydraulic pressure loading

5 实例与分析

考虑某油井的一个储油层,沿水平方向截取单位厚度的岩层建立如图 4 所示的模型,该模型作为平面应变问题分析。模型的尺寸为 $100.0 \text{ m} \times 100.0 \text{ m}$,射孔段的长度为 1.0 m,位于对称边的中间处。射孔段 A 和预设裂纹绑定段 B 对较远处的 D 、 E 、 F 边影响不大,取 D 、 E 、 F 边为 0 位移约束,孔隙压力保持与初始状态一致,同时考虑到裂纹的形状是对称分布的,它以通过井筒并且与裂纹扩展方向相垂直的面为对称面,设置为 C 边位移对称约束边界。

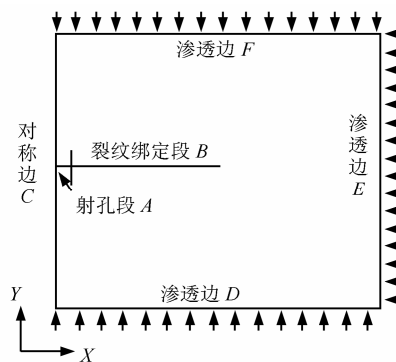


图 4 计算模型示意图
Fig.4 Sketch of the physical model

岩层采用线弹性孔隙材料模型,其弹性模量为 39.2 GPa,泊松比为 0.25,假设距裂尖正前方 0.09 m 处岩石的临界抗拉强度为 6.0 MPa。模型 X 方向的初始地应力为 15.0 MPa, Y 方向的初始地应力为 10.0 MPa。初始孔隙压力为 10.0 MPa,初始孔隙比为 0.1,渗透系数为 0.1 m/d。并假设模型的初始饱和度为 1.0,亦即模型的孔隙完全充满液体。

在水力压裂计算模拟中施加的注入压力从 10.0 MPa 逐渐增加到 40.0 MPa,压裂液黏性系数为 300.0 mPa.S,排量为 $0.05 \text{ m}^3/\text{s}$,同时渗流场孔隙压力分布采用稳态渗流方法计算。

图 5 为裂尖法向应力与注入压力的关系。当注入压力 P_0 小于 24.5 MPa 时,裂尖法向应力随注入压力的增加而增大,基本呈线性关系。当注入压力在 24.5 MPa 至 28.8 MPa 之间时,随着注入压力增大,法向应力急剧增大。当注入压力达到 28.8 MPa 时,裂尖法向应力超过 6.0 MPa,此时将超前裂尖 0.09 m 处的法向应力代入到式 (3) 中,求得 f 大于 1.0,满足裂纹扩展的临界应力准则,裂纹启裂。当注入压力逐渐从 28.8 MPa 增加到 29.8 MPa 时,裂尖的应变能逐渐释放,应力也随之降低。当注入压力大于 29.8 MPa 以后,应力集中积聚的应变能完全释放,裂尖应力趋于 0 并保持基本不变。

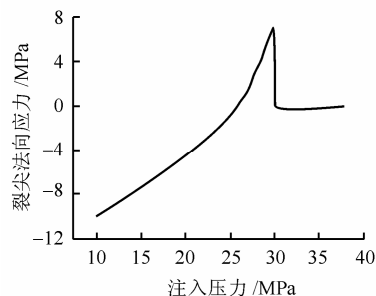


图 5 裂尖法向应力与注入压力的关系
Fig.5 Relationship of the normal stress of crack tip with injecting pressure

图 6 和图 7 分别为启裂和压裂结束时的渗流场。比较这两幅图,可以发现裂缝周边渗流场中的孔隙压力分布仅在一定范围内受裂纹扩展的影响,在此范围之外,孔隙压力基本不受裂缝影响,仍保持初始孔隙压力值不变。另由图 6 可见,启裂时裂尖周围渗流场受射孔段注入压力渗透作用的影响非常大,裂尖周围渗流场的孔隙压力达到 28.0 MPa 左右。随着裂纹扩展,注入压力对裂尖周围渗流场的渗透作用越来越弱。由图 7 裂尖周围渗流场的分布可知,当裂缝停止扩展时,裂尖前方的孔隙压力仅略大于初始孔隙压力,也就是说,此时注入压力对裂尖几乎毫无影响,由于没有了孔隙压力梯度存在,自然就不会产生有效应力,裂尖附近不再存在显著应力集中现象,裂纹停止扩展。

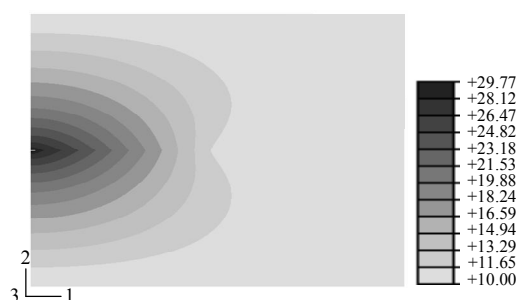


图 6 启裂时渗流场分布图 (单位: MPa)

Fig.6 Distribution of pore pressure when fracture (unit: MPa)

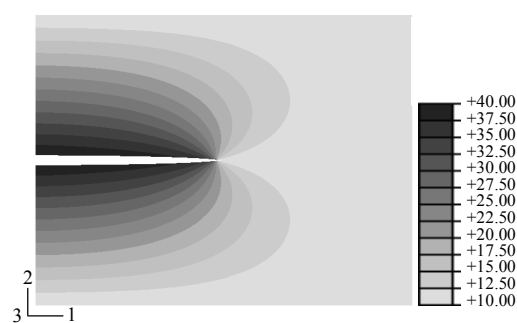


图 7 压裂结束时渗流场分布图 (单位: MPa)

Fig.7 Distribution of pore pressure after fracture (unit: MPa)

图 8 为不同注入压力条件下裂缝面内水力压力分布与裂缝长度的关系,图 9 为与此相应的裂缝形状当注入压力等于 37.43 MPa 时,可见图 9 的曲线 $P = 37.43$ MPa,裂缝长度为 14.0 m,最宽处裂缝宽度仅为 6.0 mm,它的形状与椭圆形有较大的差别。而裂缝内的水力压力分布如(图 8)曲线 $P_0 = 37.43$ MPa,该曲线的形状分成明显的 3 段,它们分别是射孔段、压裂段以及流体阻塞段的水压力值,其中

流体阻塞段的长度超过裂缝长度的 1/2,显然这样的结果与假设有较大的出入。笔者尝试解释造成这种现象的原因,由式(10)的压降公式可知,当裂缝宽度 w 很小的时,压降梯度将非常大,压裂段内的水力压力就衰减得非常快,当 w 进一步减小时裂缝面内的压力将等于根据渗流方程计算估计求得的渗透压力值,因此可以把裂缝视作相当于多孔介质中输送流体的孔隙。

当注入压力大于等于 37.96 MPa 时,图 8 中的压降曲线 P_0 分别为 37.43, 37.96, 38.36, 38.77, 39.34 MPa 和 40.00 MPa 等,可以看出随着注入压力增大,裂缝面内水力压力衰减逐渐变慢,水力压降曲线趋于越平滑,是由于当注入压力增大时裂缝就变得越宽,由式(10)可知,宽度 w 越大,压力梯度就越小,因而水力压降曲线的变化就越平缓。另外,由这几条曲线可以看到水力压力由射孔段到压裂段的过渡是非常平滑的,不存在明显的折线,从而进一步证实了假设射孔段内水力压力不衰减是可以接受的。此外,这些曲线还有一个共同点,那就是越接近裂尖的地方裂缝宽度就迅速变窄,以至在裂尖处为 0,因此在裂尖附近压力急剧减小,形成近乎陡直的曲线,其中裂尖附近流体阻塞段内的水力压力是通过计算渗流场而得到的压力,再由图 8 可知,流体阻塞段长度与裂缝长度相比不超过 2%。由图 9 还可以看到,这些裂缝形状都非常接近椭圆形。由此可见,本文假设裂缝形状为椭圆形以及取流体阻塞段内的水力压力等于渗透压都是合理的,符合实际情况。

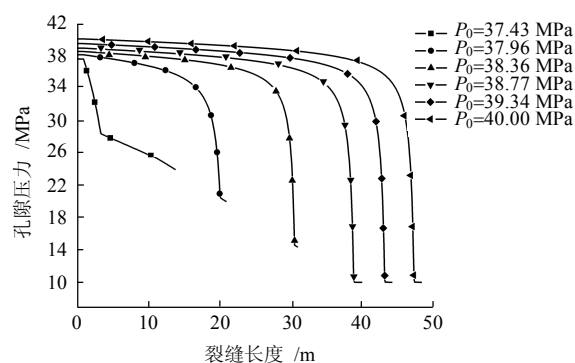


图 8 不同裂缝长时裂缝面内压力分布

Fig.8 Hydraulic pressure distribution along fracture length under different injection pressures

图 10 和图 11 分别为裂缝最大宽度 w_0 以及裂缝长度 L 与注入压力 P_0 的关系图。由图可知,注入压力小于 28.8 MPa 时,裂缝处于闭合阶段,注入

压力仅能导致裂尖周围应力集中。当注入压力等于 28.8 MPa 时, 裂缝启裂并迅速扩展 10.0 m, 最大宽度为 1.2 mm。当注入压力由 28.8 MPa 增加到 38.0 MPa 时, 最大宽度由 1.2 mm 线性递增到 6.0 mm, 裂缝长度由 10.0 m 增加到 14.0 m, 由式 (11) 和图 8 可知, 由于这个阶段内的裂缝宽度过于狭窄, 裂缝内的水力压力大都等于流场渗透压, 无法形成水力劈裂作用, 裂缝仅相当于起渗透作用的孔隙通道, 因而裂缝扩展和裂缝加宽都很缓慢。当注入压力大于 38.0 MPa 时, 由图 10 可知, 最大裂缝宽度由 6.0 mm 急剧增加到 17.5 mm, 又可由图 11 可知, 此时裂缝长度由 14.0 m 迅速扩展到 48.0 m。造成裂缝宽度和裂缝长度迅速扩展的主要原因是当裂缝宽度超过某个临界值后, 裂缝由起渗透作用的孔隙通道转变成起导流作用的裂缝通道。

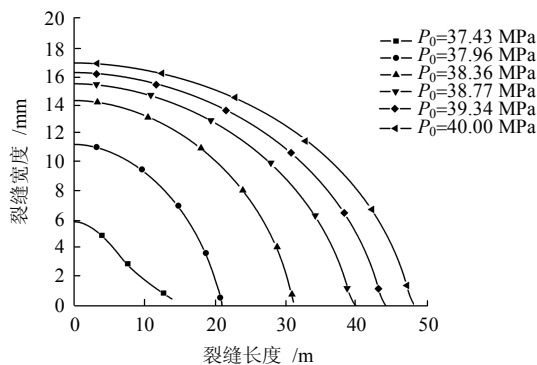


图 9 不同注入压力条件下裂缝形状图

Fig.9 Fracture shapes under different injection pressures

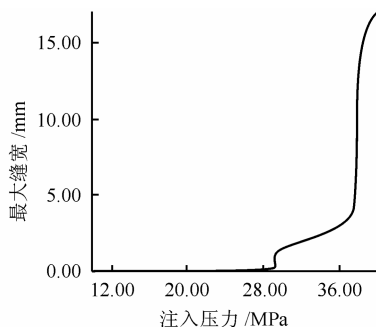


图 10 裂缝最大缝宽与注入压力关系

Fig.10 Relationship of width of widest fracture with injecting pressure

可以推测, 裂缝扩展过程中存在一个临界宽度, 它可以作为区分裂缝是作为起渗透作用的孔隙通道还是作为起导流作用的裂缝的依据, 当裂缝宽度小于这个临界宽度时, 裂缝为孔隙通道; 当裂缝宽度大于这个临界宽度时, 裂缝则作为导流通道。可选取最大宽度作为临界宽度。从图 10 可知, 本模型的裂缝临界宽度为 6.0 mm。

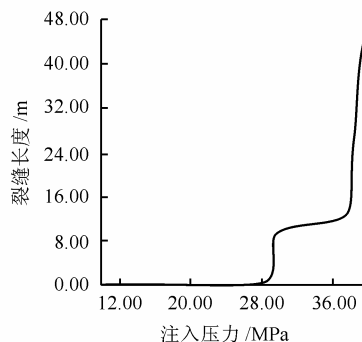


图 11 裂缝长度和注入压力关系

Fig.11 Relationship of fracture length with injecting pressure

6 结 论

本文研究了水力压裂作用下裂缝扩展演化过程的数值模拟方法。在假设裂缝形状为椭圆形的前提下, 推出裂缝面内压降方程表达式, 并借助 ABAQUS 的用户子程序 DISP 和 FLOW 接口编程实现了此算法思想, 该用户子程序能够根据裂缝扩展长度和宽度、流体黏性以及注入流量等参数的变化动态计算水力压力沿裂缝面的分布。数值模拟结果证明了本文假设裂缝形状为椭圆形以及取流体阻塞段内的水力压力等于渗透压的做法都是合理的, 符合实际情况的。获得了稳态渗流时裂缝长度和宽度与注入压力的关系, 并在此基础上, 提出了临界宽度这个概念, 它可以作为判断裂缝是作为起渗透作用的孔隙通道还是作为起导流作用的裂缝的依据。

参 考 文 献

- [1] JACQUES H, WEATHERILL B D. Modeling the propagation of waterflood-induced hydraulic fractures[C]// Society of Petroleum Engineers. U. S.: [s. n.], 1980.
- [2] ANTONIN S, CLEARY P M. Development and testing of a pseudo-three-dimensional model of hydraulic fracture geometry[C]// Society of Petroleum Engineers. U. S.: [s. n.], 1986.
- [3] RAHIM Z, HOLDITCH S A. Using a three-dimensional concept in a two-dimensional model to predict accurate hydraulic fracture dimensions[J]. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 1995, (13): 15—27.
- [4] CLEARY M P, MEEHAN D N. Major new development in hydraulic fracturing with documented reductions in job costs and increases in normalized production[C]// Society of Petroleum Engineers. U. S.: [s. n.], 1995.
- [5] ECONOMIDES M J, NOLTE K G. Reservoir Stimulation [M]. Third Edition. U. S.: John Wiley & Sons Ltd., 2000: 5—15.